Ecuatii logaritmice

Ecuatia ce contine necunoscuta sub semnul logaritmului sau (si) in baza lui se numeste **ecuatie logaritmica**.

Cea mai simpla ecuatie logaritmica este ecuatia de tipul

$$\log_a x = b. \tag{1}$$

Afirmatia 1. Daca $a > 0,\ a \neq 1$, ecuatia (1) pentru orice numar real b are o solutie unica, $x = a^b$.

Exemplul 1. Sa se rezolve ecuatiile:

$$a)\ \log_2 x = 3, \qquad b)\ \log_3 x = -1, \qquad c)\ \log_{\frac{1}{3}} x = 0.$$

Rezolvare. Se utilizeaza afirmatia 1 si se obtine
a) $x = 2^3$ sau $x = 8$; b) $x = 3^{-1}$ sau $x = \dfrac{1}{3}$; c) $x = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0$ sau $x = 1$.

In continuare vom utiliza frecvent urmatoarele proprietati ale logaritmului:

P1. Identitatea logaritmica de baza

$$a^{\log_a b} = b,$$

unde $a > 0,\ a \neq 1$ si $b > 0$.

P2. Logaritmul unui produs de factori pozitivi este egal cu suma logaritmilor factorilor:

$$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2 \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0).$$

Nota. Daca $N_1 \cdot N_2 > 0$, atunci proprietatea P_2 se scrie

$$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a |N_1| + \log_a |N_2| \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 \cdot N_2 > 0).$$

P3. Logarimtul raportului a doua numere pozitive este egal cu diferenta logaritmilor deampartitului si impartitorului:

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2 \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0).$$

Nota. Daca $\frac{N_1}{N_2} > 0$ (echivalent cu $N_1 N_2 > 0$) atunci proprietatea **P3** se scrie

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a |N_1| - \log_a |N_2| \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 N_2 > 0).$$

P4. Logaritmul puterii unui numar pozitiv este egal cu produsul dintre exponentul puterii si logaritmul acestui numar

$$\log_a N^k = k \log_a N \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0).$$

Nota. Daca k este par (k=2s) are loc urmatoarea formula

$$\log_a N^{2s} = 2s \log_a |N| \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N \neq 0).$$

P5. Formula de trecere de la o baza la alta:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ N > 0),$$

in caz particular $N = b$, se obtine

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1). \tag{2}$$

Din proprietatile de mai sus rezulta formulele

$$\log_{a^c} b^d = \frac{d}{c} \log_a b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0), \tag{3}$$

$$\log_{a^c} b^c = \log_a b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0), \tag{4}$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c \neq 0) \tag{5}$$

si daca in (5) c este par ($c = 2n$) are loc relatia

$$\log_{a^{2n}} b = \frac{1}{2n} \log_{|a|} b \qquad (b > 0,\ a \neq 0,\ |a| \neq 1). \tag{6}$$

Vom enumera si proprietatile de baza ale functiei logaritmice $f(x) = \log_a x$:

1. Domeniul de definitie al functiei logaritmice este multimea numerelor reale pozitive.

2. Domeniul de valori al functiei logaritmice este multimea numerelor reale.

3. Pentru $a > 1$ functia logaritmica este strict crescatoare ($0 < x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ \log_a x_1 < \log_a x_2$), iar pentru $0 < a < 1$, este strict descrescatoare ($0 < x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ \log_a x_1 > \log_a x_2$).

4. $\log_a 1 = 0$ si $\log_a a = 1 \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

5. Daca $a > 1$ atunci functia logaritmica primeste valori negative pentru $x \in (0; 1)$ si valori pozitive pentru $x \in (1; +\infty)$, iar daca $0 < a < 1$, functia logaritmica ia valori pozitive pentru $x \in (0; 1)$ si valori negative pentru $x \in (1; +\infty)$.

6. Daca $a > 1$ functia logaritmica este concava, iar pentru $a \in (0; 1)$ functia logaritmica este convexa.

Urmatoarele afirmatii (a se vedea, [1]) sunt utile la rezolvarea ecuatiilor logaritmice:

Afirmatia 1. Ecuatia $\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0,\ a \neq 1)$ este echivalenta cu unul din sistemele (evident, se alege acel sistem, inecuatia caruia se rezolva mai simplu)

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Afirmatia 2. Ecuatia $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ este echivalenta cu unul din sistemele

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Tinem sa mentionam ca in procesul rezolvarii ecuatiilor logaritmice adesea se aplica transformari ce modifica domeniul de valori admisibile (DVA) al ecuatiei initiale. Prin urmare pot aparea solutii "straine" sau pot fi pierdute unele solutii. De exemplu ecuatiile

$$f(x) = g(x) \text{ si } \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

sau

$$\log_a[f(x) \cdot g(x)] = b \text{ si } \log_a f(x) + \log_a g(x) = b$$

in general nu sunt echivalente (DVA al ecuatiilor din dreapta este mai ingust).

Prin urmare la rezolvarea ecuatiilor logaritmice este util de folosit in DVA transformari echivalente. In caz contrar verificarea solutiilor este parte componenta a rezolvarii. In plus, se tine seama de transformarile ce pot aduce la pierderea solutiilor.

In continuare vom considera cele mai frecvente metode de rezolvare a ecuatiilor logaritmice.

I. Utilizarea definitiei logaritmului

Exemplul 2. Sa se rezolve ecuatiile:

$$\begin{array}{ll} a)\ \log_2(5 + 3\log_2(x-3)) = 3, & c)\ \log_{(x-2)} 9 = 2, \\ b)\ \log_3 \dfrac{x-3}{x+3} = 1, & d)\ \log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2. \end{array}$$

Rezolvare. a) Logaritm a numarului pozitiv b in baza a ($a > 0$, $a \neq 1$) se numeste exponentul puterii, la care trebuie ridicat a ca sa obtinem b. Asadar $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ si, prin urmare,

$$5 + 3\log_2(x-3) = 2^3$$

sau

$$3\log_2(x-3) = 8 - 5, \qquad \log_2(x-3) = 1.$$

Iar utilizand definitia, se obtine

$$x - 3 = 2^1, \quad x = 5.$$

Verificarea este parte componenta a rezolvarii acestei ecuatii:

$$\log_2(5 + 3\log_2(5-3)) = \log_2(5 + 3\log_2 2) = \log_2(5+3) = \log_2 8 = 3.$$

Se obtine $3 = 3$ si prin urmare $x = 5$ este solutie a acestei ecuatii.

b) Similar exemplului a) se obtine ecuatia

$$\frac{x-3}{x+3} = 3.$$

Se reduce la rezolvarea ecuatiei liniare $x - 3 = 3(x + 3)$ de unde rezulta $x = -6$. Se efectueaza verificarea si se obtine ca $x = -6$ este solutia ecuatiei initiale.

c) Similar exemplului a) se obtine ecuatia

$$(x - 2)^2 = 9.$$

Se ridica la patrat si se obtine ecuatia patrata $x^2 - 4x - 5 = 0$ cu solutiile $x_1 = -1$ si $x_2 = 5$. Dupa verificare ramane doar $x = 5$.

d) Se aplica definitia logaritmului si se obtine ecuatia

$$(2x^2 - 8x + 15) = (2x + 1)^2$$

sau, dupa transformari elementare,

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

de unde $x_1 = -7$ si $x_2 = 1$. Dupa verificare ramane $x = 1$.

II. Utilizarea proprietatilor logaritmului

Exemplul 3. Sa se rezolve ecuatiile

$$\begin{aligned}
&a)\ \log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24),\\
&b)\ \log_4(x^2 - 4x + 1) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2},\\
&c)\ \log_2 x + \log_3 x = 1,\\
&d)\ 2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0,\\
&e)\ 16^{\log_4(1-2x)} = 5x^2 - 5.
\end{aligned}$$

Rezolvare. a) DVA al ecuatiei $x \in (0; +\infty)$ se determina rezolvand sistemul (conditia de existenta a logaritmilor ce sunt prezenti in ecuatie)

$$\begin{cases} x > 0,\\ x + 3 > 0,\\ x + 24 > 0. \end{cases}$$

Se aplica proprietatea **P2** si afirmatia 1 si se obtine

$$\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x(x + 3) = \log_3(x + 24),\\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 3) = x + 24,\\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 24 = 0,\\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -6,\\ x_2 = 4, \end{array} \right.\\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

b) Se utilizeaza proprietatea **P3** si se obtine o consecinta a ecuatiei initiale

$$\log_4 \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{2},$$

apoi, conform definitiei logaritmice, se obtine ecuatia algebrica

$$\frac{x^2-4x+1}{x^2-6x+5}=4^{-\frac{1}{2}}$$

sau

$$x^2-4x+1=\frac{1}{2}(x^2-6x+5),$$

de unde

$$x^2-2x-3=0$$

si $x_1=-1$ si $x=3$. Dupa verificare ramane $x=-1$.

c) $DVA:\ x\in(0;+\infty)$. Se utilizeaza proprietatea **P5** si se obtine ecuatia

$$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 3}=1$$

sau $\log_2 x\left(1+\dfrac{1}{\log_2 3}\right)=1$, $\log_2 x(1+\log_3 2)=1$, de unde $\log_2 x=\dfrac{1}{1+\log_3 2}$ sau $\log_2 x=\dfrac{1}{\log_3 6}$, sau $\log_2 x=\log_6 3$. Asadar, $x=2^{\log_6 3}$.

d) DVA al ecuatiei se obtine rezolvand sistemul $\begin{cases} x-2>0, \\ (x-4)^2\neq 0, \end{cases}$ si este $x\in(2;4)\cup(4;+\infty)$. Se aplica proprietatea **P4** (se tine seama de nota la ea si se obtine ecuatia echivalenta

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0$$

sau $\log_3(x-2)+\log_3|x-4|=0$

Se utilizeaza proprietatea **P2** si pe DVA se obtine ecuatia echivalenta

$$\log_3(x-2)|x-4|=0 \qquad (x-2)|x-4|=1.$$

Cum in DVA $x-2=|x-2|$ ecuatia se scrie

$$|x-2||x-4|=1 \quad \text{sau} \quad |x^2-6x+8|=1$$

ultima ecuatie fiind echivalenta (a se vedea proprietatile modulului) cu totalitatea de ecuatii

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+8=1, \\ x^2-6x+8=-1, \end{array}\right.$$

de unde, rezolvand ecuatiile patrate, se obtine $x_1=3$, $x_2=3+\sqrt{2}$ si $x_3=3-\sqrt{2}\notin DVA$. Asadar solutiile ecuatiei initiale sunt $x_1=3$ si $x_2=3+\sqrt{2}$.

e) Cum

$$16^{\log_4(1-2x)}=4^{2\log_4(1-2x)}=\left[4^{\log_4(1-2x)}\right]^2$$

se aplica proprietatea **P1** si se obtine ca in DVA ($x\in(-\infty;-1)$) ecuatia este echivalenta cu

$$(1-2x)^2=5x^2-5$$

sau

$$x^2+4x-6=0,$$

de unde rezulta $x_1=-2-\sqrt{10}$ si $x_2=-2+\sqrt{10}$. Ultima valoare a lui x nu intra in DVA, ramane unica solutie $x=-2-\sqrt{10}$.

III. Metoda substitutiei

In unele cazuri ecuatia logaritmica poate fi redusa la o ecuatie algebrica relativ la o necunoscuta noua. De exemplu, ecuatia $F(\log_a x) = 0$, unde $F(x)$ este o functie algebrica rationala, prin intermediul substitutiei $\log_a x = t$ se reduce la o ecuatie algebrica in raport cu t, $R(t) = 0$.

Exemplul 4. Sa se rezolve ecuatiile:

$$a)\ \lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0, \qquad c)\ \lg^2 100x + \lg^2 10x + \lg x = 14,$$
$$b)\ \log_2^2(x-1)^2 - 3\log_2(x-1) - 1 = 0, \quad d)\ 5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$$

Rezolvare. a) DVA al ecuatiei este $x \in (0; +\infty)$. Se noteaza $\lg x = t$, atunci $\lg^2 x = (\lg x)^2 = t^2$ si se obtine ecuatia patrata

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

cu solutiile $t_1 = 1$ si $t_2 = 2$. Se revine la necunoscuta initiala si se rezolva totalitatea de ecuatii logaritmice

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 1, \\ \lg x = 2, \end{array}\right.$$

de unde $x_1 = 10$ si $x_2 = 100$. Ambele solutii sunt din DVA.

b) DVA al ecuatiei este multimea $(1; +\infty)$. Cum $\log_2^2(x-1)^2 = [\log_2(x-1)^2]^2 =$ $= (2\log_2|x-1|)^2 = (2\log_2(x-1))^2 = 4[\log_2(x-1)]^2$, prin substitutia $t = \log_2(x-1)$ se obtine ecuatia patrata

$$4t^2 - 3t - 1 = 0$$

cu solutiile $t_1 = -\frac{1}{4}$ si $t_2 = 1$. Se revine la necunoscuta initiala si se obtine:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) = -\dfrac{1}{4}, \\ \log_2(x-1) = 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 2^{-\frac{1}{4}}, \\ x - 1 = 2^1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

c) DVA al ecuatiei este multimea $(0; +\infty)$. Cum

$$\lg^2 100x = (\lg 100x)^2 = (\lg 100 + \lg x)^2 = (2 + \lg x)^2,$$

$$\lg^2 10x = (\lg 10x)^2 = (\lg 10 + \lg x)^2 = (1 + \lg x)^2,$$

cu ajutorul substitutiei $t = \lg x$ ecuatia se reduce la ecuatia patrata

$$(2 + t)^2 + (1 + t)^2 + t = 14$$

sau

$$2t^2 + 7t - 9 = 0$$

cu solutie $t_1 = -\frac{9}{2}$ si $t_2 = 1$. Se revine la variabila initiala si se obtine $x_1 = 10^{-\frac{9}{2}}$ si $x_2 = 10$.

d) DVA al ecuatiei este $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Cum $x^{\lg 5} = x^{\frac{\log_x 5}{\log_x 10}} = \left(x^{\log_x 5}\right)^{\frac{1}{\log_x 10}} =$ $5^{\frac{1}{\log_x 10}} = 5^{\lg x}$, ecuatia devine $5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}$ sau $2 \cdot 5^{\lg x} = 50$, de unde $5^{\lg x} = 25$ sau $5^{\lg x} = 5^2 \Leftrightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

IV. Ecuatii ce contin expresii de tipul $f(x)^{\log_a g(x)}$

Exemplul 5. Sa se rezolve ecuatiile:

$$a)\ (x+2)^{\log_2(x+2)} = 4(x+2), \qquad b)\ 5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 10.$$

Rezolvare. a) DVA al acuatiei se determina din sistemul $\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\neq 1, \end{cases}$ si se obtine $x \in (-2;-1)\cup(-1;+\infty)$. In DVA ambii membri ai ecuatiei sunt pozitivi, prin urmare, logaritmand ambii membri ai ecuatiei, de exemplu in baza 2, se obtine ecuatia echivalenta

$$\log_2(x+2)^{\log_2(x+2)} = \log_2(4\cdot(x+2))$$

sau, utilizand proprietatile **P4** si **P2**,

$$\log_2(x+2)\cdot\log_2(x+2) = \log_2 4 + \log_2(x+2).$$

Se noteaza $\log_2(x+2) = t$ si se obtine ecuatia patrata

$$t^2 - t - 2 = 0$$

cu solutiile $t_1 = -1$ si $t_2 = 2$. Asadar,

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x+2) = -1, \\ \log_2(x+2) = 2, \end{array}\right.$$

de unde $\left[\begin{array}{l} x+2 = \frac{1}{2}, \\ x+2 = 4 \end{array}\right.$ sau $\left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{3}{2}, \\ x_2 = 2. \end{array}\right.$ Ambele solutii sunt din DVA.

b) DVA al ecuatiei $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$. Cum (a se vedea proprietatea **P5** si formula (2))

$$5^{\log_2 x} = 5^{\frac{\log_5 x}{\log_5 2}} = \left(5^{\log_5 x}\right)^{\frac{1}{\log_5 2}} = x^{\log_2 5},$$

ecuatia devine

$$x^{\log_2 5} + x^{\log_2 5} = 10 \ \text{ sau } \ x^{\log_2 5} = 5.$$

Se logaritmeaza ambii membri ai ecuatiei in baza 2 si se obtine

$$\log_2 x^{\log_2 5} = \log_2 5$$

sau $\log_2 x = 1$, de unde $x = 2$.

V. Unele metode speciale

Exemplul 6. Sa se rezolve ecuatiile

$a)$ $2^x = 9 - \log_3 x$;

$b)$ $x\log_3^2(x-1) + 4(x-1)\log_3(x-1) - 16 = 0$;

$c)$ $\log_2(x^2+1) - \log_2 x = 2x - x^2$;

$d)$ $\log_5(x+2) = 4 - x$;

$e)$ $\sqrt{\log_2(2x^2)\log_4(16x)} = \log_4 x^3$;

$f)$ $|\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-2x) - 1|$;

$g)$ $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8)\log_{x-1}(x+1) = 3$;

$h)$ $\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11$.

Rezolvare. a) Se observa ca $x = 3$ este solutie a acestei ecuatii: $2^3 = 9 - \log_3 3$, $8 = 9 - 1$, $8 = 8$. Alte solutii ecuatia nu are. In adevar, membrul din stanga ecuatiei reprezinta o functie strict crescatoare, iar cel din dreapta - o functie strict descrescatoare si, prin urmare, graficele acestor functii pot avea cel mult un punct comun. Cum $x = 3$ este solutie, rezulta ca altele nu sunt.

b) DVA al ecuatiei $x \in (1; +\infty)$. Se noteaza $\log_3(x-1) = t$ si se obtine o ecuatie patrata in t

$$xt^2 + 4(x-1)t - 16 = 0.$$

Discriminantul acestei ecuatii este $\Delta = [4(x-1)]^2 + 4x \cdot 16 = 16x^2 + 32x + 16 = 16(x+1)^2$, iar radacinile

$$t_1 = \frac{-4(x-1) - 4(x+1)}{2x} = -4 \ \text{ si } \ t_2 = \frac{-4(x-1) + 4(x+1)}{2x} = \frac{4}{x}.$$

Astfel se obtine totalitatea

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(x-1) = -4, \\ \log_3(x-1) = \frac{4}{x}. \end{array}\right.$$

Din prima ecuatie a totalitatii rezulta $x_1 = 1\frac{1}{81}$, iar a doua se rezolva similar exemplului precedent: se observa ca $x = 4$ este solutie a ecuatiei si se arata ca altele nu sunt. In adevar, membrul din stanga ecuatiei $\log_3(x-1) = \dfrac{4}{x}$ reprezinta o functie strict crescatoare pe DVA, iar membrul din dreapta in DVA este o functie strict descrescatoare, si prin urmare, graficele lor pot avea cel mult un punct comun. Asadar ultima ecuatie are solutia unica $x = 4$, iar ecuatia initiala solutiile $x_1 = 1\frac{1}{81}$ si $x = 4$.

c) DVA al ecuatiei se determina din sistemul $\begin{cases} x^2 + 1 > 0, \\ x > 0, \end{cases}$ de unde rezulta $x \in (0; +\infty)$. Se aplica proprietatea **P3** si se obtine ecuatia echivalenta

$$\log_2 \frac{x^2+1}{x} = 2x - x^2.$$

Cum $\dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ pentru $x > 0$ iar semnul egalitatii se obtine doar pentru $x = 1$, rezulta ca membrul din stanga, $\log_2 \dfrac{x^2+1}{x} \geq 1$. In acelas timp membrul din dreapta ecuatiei are valoarea maxima 1 pentru $x = 1$ (varful parabolei $y = 2x - x^2$ se afla in punctul (1;1)). Astfel ecuatia are solutii numai in cazul cand $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2+1}{x} = 2, \\ 2x - x^2 = 2, \end{cases}$ adica $x = 1$.

d) Se rezolva similar exemplului a) si se obtine $x = 3$.

e) Se utilizeaza teorema **A1** din **ecuatii irationale** si se obtine

$$\sqrt{\log_2(2x^2)\log_4(16x)} = \log_4 x^3 \;\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x^2)\log_4(16x) = \left(\log_4 x^3\right)^2, \\ \log_4 x^3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 2 + \log_2 x^2)(\log_4 16 + \log_4 x) = \left(\frac{3}{2}\log_2 x\right)^2, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 2\log_2 x)(2 + \frac{1}{2}\log_2 x) = \frac{9}{4}\log_2^2 x, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}\log_2^2 x - \frac{9}{2}\log_2 x - 2 = 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ 5t^2 - 18t - 8 = 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ \left[\begin{array}{l} t_1 = -\frac{2}{5}, \\ t_2 = 4, \end{array}\right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -\frac{2}{5}, \\ \log_2 x = 4, \end{array}\right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \\ x = 16, \end{array}\right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 16.$$

f) Se utilizeaza proprietatea **P3**, **P2** si proprietatile modulului (a se vedea, de exemplu [2]) si se obtine

$$|\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-2x) - 1| \;\Leftrightarrow\; \left|\log_2 \frac{3x-1}{3}\right| = \left|\log_2 \frac{5-2x}{2}\right| \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2 \frac{3x-1}{3} - \log_2 \frac{5-2x}{x}\right) \cdot \left(\log_2 \frac{3x-1}{3} + \log_2 \frac{5-2x}{2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2\left(\dfrac{3x-1}{3} \cdot \dfrac{2}{5-2x}\right) = 0, \\ \log_2\left(\dfrac{3x-1}{3} \cdot \dfrac{5-2x}{2}\right) = 0, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2(3x-1) = 3(5-2x), \\ (3x-1)(5-2x) = 6, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{17}{12}, \\ x = 1,\; x = \dfrac{11}{6}, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{5}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{17}{12}; \frac{11}{6}\right\}.$$

g) Se determina DVA al ecuatiei

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ x^3 - 9x + 8 > 0, \\ x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x^3 - x - 8x + 8 > 0, \\ x > 1, \\ x \neq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ (x-1)(x^2+x-8) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x^2 + x - 8 > 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{-1-\sqrt{33}}{2}, \\ x > \dfrac{-1+\sqrt{33}}{2}, \end{array} \right. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \; x > \frac{\sqrt{33}-1}{2}.$$

Se aplica proprietatea **P5** si se obtine (pe DVA)

$$\log_{x+1}(x-1)(x^2+x-8) \cdot \frac{1}{\log_{x+1}(x-1)} = 3$$

sau

$$\log_{x+1}(x-1)(x^2+x-8) = \log_{x+1}(x-1)^3,$$

de unde rezulta

$$(x-1)(x^2+x-8) = (x-1)^3,$$

sau

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x^2 + x - 8 = x^2 - 2x + 1, \end{array} \right.$$

de unde $x_1 = 1, \; x_2 = 3$.

Cum $x = 1$ nu verifica DVA si $3 > \dfrac{\sqrt{33}-1}{2}$ ramane numai $x = 3$.

h) Cum functia $f(x) = 6x - x^2 - 5$ isi atinge maximul 4 pentru $x = 3$, rezulta

$$\log_2(6x - x^2 - 5) \leq 2.$$

Membrul din dreapta ecuatiei $x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x-3)^2 + 2$ si, prin urmare 2 este valoarea minima (se atinge pentru $x = 3$). Astfel ecuatia are solutii doar cand concomitent $\log_2(6x - x^2 - 5) = 2$ si $x^2 - 6x + 11 = 2$ adica $x = 3$.

Inecuatii logaritmice

Inecuatia ce contine necunoscuta sub semnul logaritmului se numeste **logaritmica**.

In procesul rezolvarii inecuatiilor logaritmice se aplica frecvent urmatoarele afirmatii referitor echivalenta ecuatiilor si se tine seama de proprietatea de monotonie a functiei logaritmice (a se vedea de exemplu [1]).

Afirmatia 1. Daca $a > 1$, inecuatia $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalenta cu sistemul de inecuatii $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Afirmatia 2. Daca $0 < a < 1$, inecuatia $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ este echivalenta cu sistemul de inecuatii $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Afirmatia 3. Inecuatia $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ este echivalenta cu totalitatea sistemelor de inecuatii:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Mentionam, ca in inecuatia $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ in locul semnului $>$ poate sa figureze unul din semnele $\geq$, $<$, $\leq$. In asa caz afirmatiile 1-3 se modifica respectiv.

Exemplul 1. Sa se rezolve inecuatiile

$a)$ $\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x + 8)$;

$b)$ $\log_{0,2}(5 - x) > \log_{0,2} \dfrac{2}{x - 2}$;

$c)$ $\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > 0$;

$d)$ $\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5 - x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4 - x)$;

$e)$ $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

Rezolvare. a) Se aplica afirmatia 1 si se obtine

$$\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x + 8) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq x + 8, \\ x + 8 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 \geq 0, \\ x > -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ x \geq 4, \end{array} \right. \\ x > -8, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-8; -2] \cup [4; +\infty).$$

b) Baza logaritmului din inecuatie este un numar intre zero si unu, se aplica afirmatia 2 si se obtine

$$\log_{0,2}(5 - x) > \log_{0,2} \frac{2}{x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x < \dfrac{2}{x - 2}, \\ 5 - x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(5 - x)(x - 2) - 2}{x - 2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7x - x^2 - 12}{x - 2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-(x - 3)(x - 4)}{x - 2} < 0, \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 < x < 3, \\ x > 4, \end{array} \right. \\ x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2 < x < 3, \\ 4 < x < 5, \end{array}\right. \Leftrightarrow \; x \in (2;3) \cup (4;5).$$

c) Se scrie $0 = \log_2 1$ si se aplica afirmatia 1

$$\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > \log_2 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) > 1.$$

Se scrie $1 = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}$ si se aplica afirmatia 2 si se rezolva sistemul obtinut

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \log_8 x < \dfrac{1}{3}, \\ \log_8 x > 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 < x < 8^{\frac{1}{3}}, \\ x > 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \; 1 < x < 2.$$

d) Se aplica afirmatia 3 si se obtine

$$\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{x-3} > 1, \\ 5-x > 4-x > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0 < \dfrac{x+2}{x-3} < 1, \\ 0 < 5-x < 4-x, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (3;4), \\ x \in \emptyset, \end{array}\right. \Leftrightarrow \; x \in (3;4).$$

Rezolvarea primului sistem al totalitatii

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{x-3} > 1, \\ 5-x > 4-x, \\ 4-x > 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{x-3} - 1 > 0, \\ 5 > 4, \\ x < 4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{5}{x-3} > 0, \\ x \in \mathbf{R}, \\ x < 4, \end{array}\right. \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Rezolvarea ultimului sistem al totalitatii

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < \dfrac{x+2}{x-3}, \\ \dfrac{x+2}{x-3} < 1, \\ 0 < 5-x, \\ 5-x < 4-x, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 3, \end{array}\right. \\ \dfrac{5}{x-3} < 0, \\ x < 5, \\ 5 < 4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 3, \end{array}\right. \\ x < 3, \\ x < 5, \\ x \in \emptyset, \end{array}\right. \Leftrightarrow \; x \in \emptyset.$$

e) Se scrie $1 = \log_{2x} 2x$, se aplica afirmatia 3 si se tine seama ca semnul $>$ este inlocuit cu $<$.

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < \log_{2x} 2x \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 < 2x, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 0 < 2x < 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x, \\ 2x > 0, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (1;2) \cup (3;6), \\ x \in (0; \frac{1}{2}), \end{array} \right. \Leftrightarrow \ x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (1;2) \cup (3;6).$$

Rezolvarea primului sistem al totalitatii

$$\left\{ \begin{array}{l} x > \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > \dfrac{1}{2}, \\ 1 < x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 3, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \ x \in (1;2) \cup (3;6).$$

Rezolvarea ultimului sistem al totalitatii

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 > 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 6, \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \ x \in (0; \frac{1}{2}).$$

Inecuatia de tipul $F(\log_a x) > 0$, se reduce prin intermediul substitutiei $t = \log_a x$ la inecuatia algebrica $F(t) > 0$. Se rezolva inecuatia $F(t) > 0$, iar apoi se rezolva ecuatiile logaritmice simple ce se obtin. Bineanteles aceeasi se refera si la inecuatiile similare ce se obtin din cea precedenta, inlocuind in locul semnului $>$ unul din semnele $<$, $\leq$, $\geq$.

Exemplul 2. Sa se rezolve inecuatiile

$$a) \ \log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geq 0;$$

$$b) \ \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} < 1.$$

Rezolvare. a) Se noteaza $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ si se rezolva inecuatia patrata $t^2 + t - 2 \geq 0$, de unde rezulta $t \leq -2$ sau $t \geq 1$. Asadar se obtine totalitatea, ce se rezolva astfel:

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x \leq -2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}, \\ 0 < x \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ 0 < x \leq \dfrac{1}{2}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \ x \in (0; \frac{1}{2}] \cup [4; +\infty).$$

b) Se noteaza $t = \lg x$ si se obtine inecuatia rationala

$$\frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} < 1$$

ce se rezolva utilizand metoda intervalelor (a se vedea de exemplu [1], [2])

$$\frac{1}{5 - t} + \frac{2}{1 + t} < 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{1 + t + 2(5 - t) - (5 - t)(1 + t)}{(5 - t)(1 + t)} < 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{t^2 - 5t + 6}{(5 - t)(1 + t)} < 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{(t - 2)(t - 3)}{(5 - t)(t + 1)} < 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1, \\ 2 < t < 3, \\ t > 5. \end{array} \right.$$

Se revine la variabila initiala si se obtine

$$\begin{cases} \lg x < -1, \\ 2 < \lg x < 3, \\ \lg x > 5, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{10}, \\ 100 < x < 1000, \\ x > 10^5, \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{10}) \cup (100; 1000) \cup (10^5; +\infty).$$

In cazul inecuatiilor logaritmice ce nu au forma celor din afirmatiile 1-3, se determina DVA si prin transformari ce pastreaza echivalenta se reduc la inecuatii ce se rezolva cu ajutorul echivalentelor 1-3.

Exemplul 3. Sa se rezolve inecuatiile

$$a)\ \lg(x-2) + \lg(x-5) < \lg 4; \qquad c)\ \frac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_2(\sqrt{4x+5}+11)} > \frac{1}{2};$$

$$b)\ \log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 \leq \frac{5}{2}; \qquad d)\ \frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}}.$$

Rezolvare. a) DVA al inecuatiei este multimea $(5; +\infty)$. Se aplica proprietatea **P2** si se obtine inecuatia

$$\lg(x-2)(x-5) < \lg 4.$$

Se utilizeaza afirmatia 1 si se obtine sistemul

$$\begin{cases} (x-2)(x-5) < 4, \\ (x-2)(x-5) > 0. \end{cases}$$

Se rezolva sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 5, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2, \\ x > 5, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; 2) \cup (5; 6).$$

Se tine seama de DVA si ramane $x \in (5; 6)$.

b) DVA al inecuatiei se determina din sistemul

$$\begin{cases} 3x > 0, \\ 9x > 0, \\ 9x \neq 1, \\ 3x^2 > 0, \\ 3x^2 \neq 1, \\ 9x^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq \dfrac{1}{9}, \\ x \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; \frac{1}{9}) \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty).$$

Se trec toti logaritmii in baza 3

$$\frac{\log_3 3x}{\log_3 9x} + \frac{\log_3 9x^2}{\log_3 3x^2} \leq \frac{5}{2}.$$

Se aplica proprietatea **P2** si se obtine

$$\frac{1 + \log_3 x}{2 + \log_3 x} + \frac{2 + 2\log_3 x}{1 + 2\log_3 x} \leq \frac{5}{2}.$$

Se noteaza $\log_3 x = t$ si se rezolva ecuatia rationala obtinuta prin metoda intervalelor.

$$\frac{1+t}{2+t} + \frac{2+2t}{1+2t} - \frac{5}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(1+t)(1+2t) + 2(2+2t)(2+t) - 5(2+t)(1+2t)}{2(2+t)(1+2t)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2t^2 - 7t}{(2+t)(1+2t)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-t(2t+7)}{(2+t)(1+2t)} \leq 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; -\frac{7}{2}] \cup (-2; -\frac{1}{2}) \cup [0; +\infty).$$

Asadar, revenind la variabila initiala se obtine totalitatea de inecuatii logaritmice simple

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x \leq -\frac{7}{2}, \\ -2 < \log_3 x < -\frac{1}{2}, \\ \log_3 x \geq 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3^7}}, \\ \frac{1}{9} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$$

Se tine seama de DVA si se obtine multimea solutiilor inecuatiei initiale

$$x \in (0; \frac{1}{27\sqrt{3}}] \cup (\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup [1; +\infty).$$

c) DVA al inecuatiei se obtine rezolvand sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{4x+5} - 1 > 0, \\ \sqrt{4x+5} + 11 > 0, \\ \sqrt{4x+5} + 11 \neq 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x > -1, \\ x \geq -\frac{5}{4}, \end{array}\right. \Leftrightarrow x > -1.$$

Cum $\log_2(\sqrt{4x+5} + 11) = \log_2(1 + (\sqrt{4x+5} + 10)) > \log_2 1 = 0$ inecuatia este echivalenta cu inecuatia

$$2\log_2(\sqrt{4x+5} - 1) > \log_2(\sqrt{4x+5} + 11)$$

de unde rezulta

$$(\sqrt{4x+5} - 1)^2 > \sqrt{4x+5} + 11.$$

Se efectueaza substitutia $t = \sqrt{4x+5}$, $t \geq 0$ si se obtine inecuatia patrata

$$(t-1)^2 > t + 11,$$

sau

$$t^2 - 3t - 10 > 0,$$

de unde $t < -2$ sau $t > 5$. Cum $t \geq 0$, ramane $t > 5$ sau $\sqrt{4x+5} > 5 \;\Leftrightarrow\; x > 5$.

Se tine seama de DVA si se obtine raspunsul $x \in (5; +\infty)$.

d) Se utilizeaza metoda intervalelor generalizata: ($DVA \quad x \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$).

$$\frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2 \sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{\log_2 \sqrt{x+1} - \log_2(x-1)}{\log_2(x-1)\log_2 \sqrt{x+1}} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}}{\log_2(x-1)\log_2 \sqrt{x+1}} < 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \cdot \log_2(x-1)\log_2 \sqrt{x+1} < 0.$$

Cum in DVA $\log_2(x-1) > 0$ pentru $x > 2$ si $\log_2(x-1) < 0$ pentru $1 < x < 2$, $\log_2 \sqrt{x+1} > 0$ pentru orice x din DVA, $\log_2 \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} > 0$ pentru $x \in (1;2) \cup (2;3)$ si $\log_2 \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} < 0$ pentru $x > 3$

	1		2		3	
$\log_2(x-1)$		$-$	$\circ$		$+$	
$\log_2 \sqrt{x+1}$		$+$	$\circ$		$+$	
$\log_2 \dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	$\circ$	$+$		$-$
$\log_2(x-1)\log_2 \sqrt{x+1}\log_2 \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$		$-$	$\circ$	$+$		$-$

se obtine $x \in (1;2) \cup (3;+\infty)$.

Pentru consolidarea deprinderilor de rezolvare a ecuatiilor si inecuatiilor logaritmice se recomanda a consulta de exemplu problemarele [3-5].

Bibliografie

1. P. Cojuhari. Ecuatii si inecuatii. Teorie si practica. Chisinau, Universitas, 1993.

2. P. Cojuhari, A. Corlat. Ecuatii si inecuatii algebrice. Mica biblioteca a elevului. Seria matematica si informatica. Editura ASRM. Chisinau, 1995.

3. C.Cosnita, F.Turtoiu. Probleme de algebra. Editura Tehnica. Bucuresti, 1989.

4. E.D.Kulanin i dr. 3000 concursnih zadaci po matematiche. Airis Rolif. Moscova, 1997(rus.)

5. F.P. Iaremciuc, P. Rudcenco. Algebra i ălementarnîe funcţii. Kiev, Naucova Dumca, 1987. (rus.)